上越数学教育研究，第 22 号，上越教育大学数学教室, 2007 年, pp.65-76.

確率の授業における中学生の知識の形成過程についての研究

橋　本　英　明
上越教育大学大学院修士課程２年

１．　はじめに

現在の中学校の確率の授業は、実際の試行実験のデータから出発し、そのデータから予測できる知識を形成していくことに特徴がある。しかし、試行回数を増減させても、あることがらの起こった相対度数が数学的確率の値と一致するとは限らない。子どもたちにとって、実験データの集積、分析により、現実的な場面から数学的確率の知識へと発展させていくことは､われわれの想像以上に難しい。

本研究の目的は、中学校数学の確率単元における子どもの知識の形成過程を明らかにし、授業改善への示唆を得ることである。

本稿では、第一に、確率に関わる先行研究から、確率の知識を子どもたちが形成していくことの困難さについて考察する。確率の教材が、教科書等で現実的な場面から出発することが多いことを考慮し、現実的な場面から出発して数学化に至る立場を取る現実的数学教育（Realistic Mathematics Education, 略称 R.M.E.）理論を視座に置き、R.M.E.理論に密接に関連するカリキュラム開発である Mathematics in Context（略称 MiC, Romberg et al., 1996）を概観する。第二に、R.M.E.理論において心的形成物であるモデルについて考察し、子どもの活動を分析する視点を設ける。第三に、実践した教授実験における子どもの活動を分析、考察する。

２．　確率に関わる先行研究

2.1.　我が国における確率教材の取り扱い

西中（1967）は、戦前の我が国の数学教育の中で、確率の授業が義務教育の中ではほとんど行われていなかったことを指摘している。1968 年の学習指導要領（文部省, 1968a, 1968b）の改訂のときに、確率の学習は、義務教育に導入された。この改訂は、当時世界的な規模で広がった数学教育現代化運動の影響を強く受けており（福森, 1989）、また、この背景には、新しい数学概念の導入により、数学的な考え方をいっそう育成していくねらいがあった（植芝, 1968）。

しかし、1977 年の改訂で、確率の学習は小学校算数の学習指導要領（文部省, 1978a）から削除されて、中学校の学習指導要領（文部省, 1978b）からは順列と組み合わせの考え方、期待値の意味、標準偏差、相関の見方の内容が削除された。現行の学習指導要領（文部省, 1999）においては、中学校の２年生で、確率の意味、起こりうる場合の数、簡単な場合についての確率を学習するのみである。

林（1972）、手塚（1980）、余伝ら（1983）は、ある事象を別の事象に置き換えることによって、ある事象の確率を捉えることが容易になることを示した。しかし、置き換えられた事象がもとの事象と同じ構造を持つことを子どもたちが見抜く過程については、詳細に記述されていない。

古藤（1972）は、事象に対して、子どもたちに予想を立てさせた後に、実験を行わさせ、

その結果と数学的確率を比較させることによって、数学的確率の妥当性を示すことが重要であると述べている。しかし、古藤(1972)によれば、２枚の硬貨を投げたときに１枚が表で他が裏の出現する確率 p を、99 ％の信頼係数で推定しその値を $0.49 \leqq p \leqq 0.51$ でおさえるためには、２万回の実験が必要である。よって、上記の問題において多くの子どもの予想する確率 $\frac{1}{3}$ を修正するためには、膨大な試行回数と時間を費やさなければならない。

2.2. 確率の知識を形成していく困難さ

確率で用いられている数は、確定した事象を表すのに用いられているだけでなく、さいころの目の出方など不確定な事象の起こる程度を表している(文部科学省, 1999)。Steinbring (1991)は、確率の難しさを、決定論的な法則に従って絶対的な精度を持って起こるのではない偶然に、ある確かな数を与えることであると指摘する。確率の問題は、現実的な場面から出発し、現実的な場面を数学的な情況に置き換えて解決するものであるので、現実的な世界から数学的な世界に移行させていくことに難しさがある。

また、子どもたちが、確率の知識を形成することにおける難しさの一つに大数の法則がある。半田(1997)は、試行回数の増加に伴う相対度数の変化を子どもたちがどのように捉えているのかを詳細に分析した。半田(1997)によれば、多数回の試行によって相対度数が数学的確率に近づくと答えている子どもたちも、その近づくという意味を相対度数が安定する値と意識できる者は少なく、また、相対度数が収束する値ということの意味もあいまいである。

2.3. MiCからの示唆

確率の知識を形成していくことの難しさに対して、ウイスコンシン大学とフロイデンタール研究所との共同開発による、MiC の授業カリキュラムに着目した。

MiC と関連する R.M.E.理論を先導した Freudenthal(1991)は、数学を、子どもたちに近く現実的なものであり、人間の活動であるとして見ている。我が国の場合も、現行の確率教材の扱いにおいて、現実的な場面を基点とする。R.M.E.理論では、Freudenthal の抱く数学観を柱に教材開発をしているので、当然のことながら、確率についても現実的な場面から出発してカリキュラムを開発している。

MiC では、子どもにとって豊かな文脈を与えて、現実的な情況からの活動として確率の知識を形成していくことを重視している。また、公平さを確率の知識の基礎として位置づけている。公平さは、現実的な世界において、同じ程度に起こることが期待できることを、数学的な世界において、同様に確からしい確率空間を形成し数値化していくための土台である。公平さは、現実の世界から数学の世界へと発展させていくことができる素朴な知識である。

2．4.　R.M.E.理論におけるモデル

Freudenthal(1991)は、数学教授の最終的な目標で根源的なものは、心的働きによって心的形成物であるモデルを形成していく過程であると述べている。また、モデルの形成過程では、活動において情況における操作が、次の考察の心的対象となる(Freudenthal, 1971, p.417)。 Freudenthal(1991)が呼ぶモデルは、従来シェマと言われていた心的形成物を言い直したものである。

Treffers(1991)は、ある活動において抽象的であるモデルが、次の活動において具体的になることを、モデルの多面性(Treffers, 1991, p.33)と指摘する。すなわち、ある活動における情況から数学的な関係を見いだし抽象的な知識への橋渡しを成し遂げた model-for は、新たに次の活動における具体的な model-of として働き、発達していく。

Gravemeijer（1997, 2000）は、問題解決における情況的水準と形式的水準の間を、参照的水準と一般的水準に分けて、形式的水準の数学的な知識をモデルの自己発達により、非形式的な手法と結びつけた。Gravemeijer（1997）から得られた示唆は、情況に依存した心的形成物である model-of から、形式的な数学に向かう model-for への移行である。この過程では、非形式的な知識が対象化されて、個々の活動から独立し、学級全体の議論で用いられるようになる具象化があった。

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は、model-of から model-for への移行を、単一的な転換ではなく、一連の局所的な移行と捉え、図１のように表した。

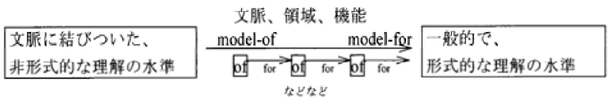

図 1. 理解の水準と model-of から model-for への移行

（Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p.30）

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は、百分率の学習指導において、model-of から model-for への移行として、次の百分率における学習過程を示している。

１から３（番号は筆者による）は、Van den Heuvel-Panhuizen（2003）のあげている mode-of から model-for への移行の例である。

1. 劇場ホールの着席情況を着色することが、他の情況においても、他の多くのものからあるものを抜き出した情況を表現する方法になること。
2. 劇場ホールのすべての座席を表す四角の数に対して着色された四角の数が、占有計に置き換えられること。
3. 占有計が徐々に簡潔な帯び図に変わること。

１は、文脈に依存にしている非形式的な活動である。その後、劇場の着席情況を捉える model-of が、駐車場の満車率など他の情況を捉える model-for の活動に移行している。

２は、割合を示す情況を図表化する活動である。劇場の満席率を表す着色が、占有計に発達することによって、子どもたちの百分率を捉えるモデルの問題文の情況、文脈への依存度は低くなる。子どもたちは心的に model-of から model-for へと移行している。

最後に３である。簡潔な帯び図を用いた活動における情況への依存はさらに低くなり、これまでの活動を通してそこに含まれる数値の間の倍､比例の関係に着目するようになる。

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は、model-of から model-for への移行とは、モデル自体の機能の変化であると同時に、子どもたちによるモデルの見方の変容と述べた。model-of から model-for への移行を、モデルの見方の変容と捉える Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の視点は、モデル自体の発達と見る Gravemeijer（1997, 2000）とは異なる。しかし、Gravemeijer（1997, 2000）も、Van den Heuvel-Panhuizen（2003）も、心的形成物であるモデルの自己発達を視座に、知識の形成過程を捉えていることは共通である。

子どもたちにとって､現実である情況とは、毎日の生活環境や架空のシナリオのみならず､数学自体も含む（Gravemeijer, 2000, p.237）。一方、子どもたちの心の中で現実的である限りは、おとぎ話の創造世界や数学の形式的な世界でさえも、問題のための適切な文脈になりうる（Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p.10）。よって、Gravemeijer（2000）の捉えている情況と Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の述べる文脈は、ほぼ同じである。

また、Van den Heuvel-Panhuizen（1996）は、理解を、文脈に関連した非形式的な解法の発明に始まり、より効率的な解法や図式化の工夫を経て、より広い関係において成り立つ原則を獲得する行為と見ている。Gravemeijer（1997）は、知識を人間の活動の産物であり、その活動の中で変更し形成していく動的なものと捉えている。よって、Van den

Heuvel-Panhuizen（1996）が捉えている、子どもたちの理解は、Gravemeijer（1997）の論じている知識の形成とほぼ同じである。

R.M.E.理論を踏襲した我が国の研究としては、三木（2001）、高橋（2003）などがある。三木（2001）は、中学校の第二学年における連立方程式の単元における実験授業の分析を通して、model-for へと数学的知識が発展していくことの難しさを述べている。高橋（2003）は、小数の乗除法について、子どもの既有の知識と子どもが新たに構成する数学的知識とがつながりを持つことの重要性について言及している。三木（2001）、高橋（2003）から得られた知見は、model-of から model-for への移行は、子どもたちにとって、跳躍があるということである。

３．　子どもの活動を分析する視点

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の示す図１の枠組みを基に、数学の知識を形成していく過程を分析する。Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の枠組みを採択したのは、知識の形成過程を系列的に捉えることで、model-of から model-for への移行に、新たな視点が与えられると考えたからである。

４．　教授実験の分析と考察

4.1.　教授実験の方法

2006 年２月 21 日から３月 20 日の間に、群馬県内の周囲に住宅地と田園地帯がある公立中学校の２年生１クラスで、確率の単元全９時間の教授実験を実施した。対象のクラスは、通常の２クラスを無作為に三等分して編成されたうちの一つである。

授業の様子を、３台の VTR で記録した。また、実態調査、授業観察、教科担当との話し合いから、５名の子どもたちを抽出した。なお、プロトコルに付けられた発話番号は、分析のために用いたものであり、子どもを表すイニシャルはすべて仮名である。

4.2.　実施計画

時	学習のねらい	取り扱う教材、用いた表記等
1	偶然性を可能性の数値として表せる事象を公平さから捉える。	グーパーじゃんけん、硬貨、さいころなど 公平か否か
2	偶然性を可能性の数値として表せない事象を公平さから捉える。 はしご図の段数で見積もった偶然性を表す。	黒板消し、王冠、画鋲 はしご図
3	はしご図の段数で表された偶然性を百分率や分数で表す。 タイル図で、タイルの枚数の割合と確率の相互の関係を捉える。	百分率、分数、タイル図
4	数学的確率の値と実際の試行の結果から求められる相対度数との関係について考える。	さいころ
5	試行回数の増加に伴う、相対度数の変化について考える。 迷路図の状況を形式的に樹形図に表し、問題解決に用いる。	多数回の実験データ 迷路図、樹形図
6	樹形図から確率を求める。 結合された事象の確率を考える。	迷路図、2、3 枚の硬貨、グーパーじゃんけん 樹形図
7	樹形図から確率を求める。 結合された事象の確率を考える。	グーパーじゃんけん、2 個の賽子の目の和 樹形図、確率分布表、直積表
8	くじを先に引くのと後から引くのではどちらが得か。 順列ではなく、組み合わせを用いることで効率的に解決する。	くじ 樹形図
9	非復元事象と復元事象の確率を考える。 組み合わせを用いることで効率的に解決する。	色違いのボールの並順 樹形図

図 2.　教授実験における確率単元の授業内容図

図２は、Romberg et al.（1996）、藤田ら（2006）を参考にした教授実験の単元計画である。

4.3.　抽出した子どもについて

本論文では、学習活動に対して発話、記述が多いという特徴を持っていたＤＭの活動を取りあげ、以下にその詳細を述べる。

4.3.1.　第１時の活動と分析

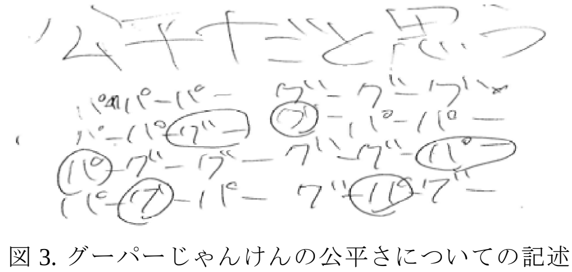

図 3. グーパーじゃんけんの公平さについての記述

グーパーじゃんけんは、三人でグーまたはパーを出したときに、一人だけ違う手を出した者が勝ちになる規則である。

ＤＭは、グーパーじゃんけんについて、「８通りずつの２通りずつ」という model-of を形成し、ジャンケンに参加する三人のそれぞれは公平であると考えた。次に、給食当番の片付けを二人の中から公平に決める方法につい

て、ＤＭは、ジャンケンをあげている。

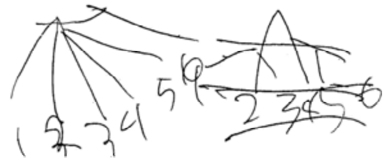

図 4. １個のさいころを投げたときの樹形図

また、ＤＭは、１個のさいころを投げたときの樹形図では、二股に分かれていたものを六股に延長したものを描いた。二股の樹形図の記述より、ＤＭは、１から３の３通りと、４から６の３通りが起こることを同じ程度に期待できると考えている。ＤＭはその後、六股の樹形図を残した（図４参照）。

ＤＭの公平さを捉える model-of は、一貫して「何通り中の何通り」であった。確率に表す前段階として、「何通り中の何通り」は、１回の試行において、予測される起こりうる結果と、起こった結果をまとめて数値で捉えようとする model-of である。一方、ＤＭ以外の多くの子どもたちに見られた「何回中で何回起こったか」は、複数回の試行において、ある特定の事象の起こった回数を捉える model-of であり、経験に依存しており、前者の model-of とは開きがある。

4.3.2.　第２時の活動と分析

ＤＭは、偶然事象と必然事象を分類するときに、「元旦が１月の第３週の月曜日である」、「電卓で、２＋２＝と押したら、液晶画面に４と出る」を、いったん起こることもあれば起こらないこともある偶然事象とした後に、絶対に起こらない必然事象に修正した。ＤＭは、まず最初に事象には、必然事象と偶然事象があるという model-of を形成した。

次は、偶然事象を具体物の対称性などから数値化できるものと容易に数値化できないものに分類する活動である。

|35:50 |00604 |ＤＭ |意味分かんねー。
|36:01 |00606 |ＤＭ |意味分かんない。
|36:05 |00608 |ＤＭ |どういうことだよ。
|36:40 |00609 |ＤＭ |意味分かんないから。

00604 から 00609 は、偶然事象を、具体物の物理的な対称性などから数値化できるものと、数値化が容易にはできないものに分類する活動に取り組んだときのＤＭの発話である。これらの発話に見られるように、ＤＭは、偶然事象を数値化できるものとできないものに分類することに対して、消極的であった。

活動の様子から、ＤＭは、偶然事象と必然事象（必ず起こることと、絶対に起こらないこと）に分類する model-of を形成しているが、偶然事象を数値化できるものと数値化できないものに分類する model-of を形成することに困難さを持っている。しかし、必ず起きることを 100 ％、絶対に起こらないことを０％と表していることから、ＤＭは、必然事象を二つに分類する model-of を形成している。

4.3.3.　第３時の活動と分析

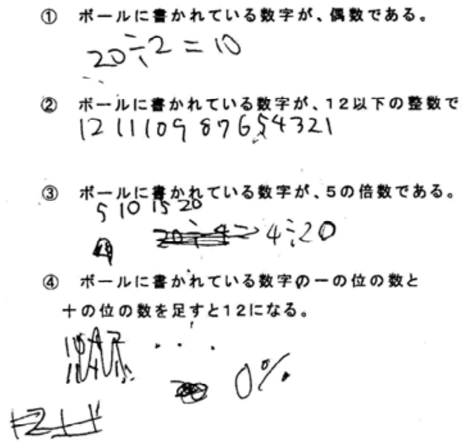

図 5. ことがらの起こりやすさをはしご図に表すための記述

第３時は、あることがらの起こりやすさをはしご図の段数を用いて、表す活動である（図５参照）。

ＤＭは、①では、偶数である場合の数を計算により求めている。②、③では、具体的に数を書き上げている。このことは、「20 個中の何個ずつ」の model-of を形成する以前に、ある特定の事象およびその要素の数を捉えるための model-of が、ＤＭにとっては、必要で

あるということを示している。

さらに、③では、20 ÷４の計算の記述が見られる。ＤＭは、(大きい数)÷(小さい数)と求めた。ＤＭは、商の結果が１より小さい数になるという抵抗感を持っており、問題の情況に結びついた単位のついた数の計算で、(小さい数)÷(大きい数)の商に、現実感を持っていない。

最後に、第３時の最後のタイル図の活動におけるＤＭの様子を述べる。16 枚中４枚が黒く塗られたタイル図の問題において、確率 $\frac{1}{4}$ をＤＭは順調に答えられた。しかし、次の 16 枚中８枚が黒く塗られた問題で、ＤＭは、確率を当初 $\frac{2}{4}$ とした。この考え方を、ＤＭは、次図６のように説明していた。

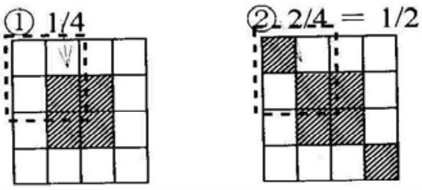

図 6. タイル図での確率の説明

図６で、点線で囲まれた部分の割合をもって、ＤＭは、確率を捉えていた。①では、整合するが、②では数学的に正しくはない説明である。その後、ＤＭは、ＨＳからの指摘を受けて、②を $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ と修正した。

4.3.4.　第４時の活動と分析

第４時は、30 回の試行において、約５回６の目が出ることを全体に確認した後に、実際に 30 回の試行実験から得られた結果とあらかじめ予測した５回と比較する活動から始まった。

15:12	01155	ＤＭ	５回(余分に)やりすぎちゃった。アハハハ、適当にやり過ぎちゃった。異常にやっちゃったー。
16:03	01161	ＤＭ	じゃあ、60 回やればいいじゃん。

ＤＭは、当初 30 回の試行を行うところを５回余分に行っている。そこで、ＤＭは、60 回の試行を行って半分にすればよいという考え方を思いついた。これは、ＤＭが、相対度数は試行回数によらず一定であるという model-of を形成しているからである。

27:21	01267	ＤＭ	たまたまなった。

数学的確率を基にしてあらかじめ予想した５回と実際の試行における結果に開きがあることを、ＤＭは偶然であると捉えた。ＤＭの model-of は、相対度数が数学的確率にいつでも一致することである。したがって、ＤＭは、試行回数を増やしたときの相対度数の実験方法の適切さを否定している。

34:14	01337	ＤＭ	100 回くらいでいいじゃん。

また、ＤＭは、試行回数を 6000 回にまで増やすことへの疑問を発話 01337 のように述べた。すなわち、ＤＭは、試行回数にかかわらず相対度数は、数学的確率に一致するものであるから、6000 回もの多数回の実験をする必要がないと考えている。さいころを６回投げるとき、４の目が少なくとも１回は出ることについて信じるか否かを全体に問うと、ＤＭは信じると挙手をした。

4.3.5.　第５時の活動と分析

第４時では、ＤＭは、試行回数の増減に関わらず相対度数を一定であると捉えていた。

投げた回数	6の目が出た回数	6の目が出る割合
0	0	0
60	7	0.117
120	13	0.108
180	25	0.139
240	35	0.146
300	44	0.147
360	56	0.156
420	69	0.164
480	79	0.165
540	91	0.167
600	103	0.172
660	113	0.171
720	120	0.167
780	131	0.168

図 7. 試行回数の変化に伴う６の目が出る割合

しかし、図７を見ると、ＤＭは、試行回数の増加に伴う相対度数の値について、全体的に上がっていると答えた。よって、ＤＭは、ｙ(6 の目が出た回数)をｘ(試行回数)の式で

は表せないと答えた。試行回数の増加に伴い、相対度数は増加するというＤＭの model-of は、修正が必要である。しかし、このときからＤＭは、相対度数と数学的確率は一致しないこともあると見ている。

その後、ＤＭは、相対度数が正確には数学的確率の $\frac{1}{6}$ と一致しないことから、確率を $\frac{1}{6}$ ではなくて、相対度数の値と見ればいいと答えた。これは、ＤＭ以外の子どもたちには見られなかった model-of である。

また、試行回数の増加に伴う６の目が出た回数を座標に点で取った後は、ＤＭは、これらの点を折れ線で結び傾き $\frac{1}{6}$ と比較しようとはしなかった。ＤＭは、試行回数の増加に伴い６の目が出る相対度数の値が変化していることに着目しているが、相対度数が数学的確率に近づいていくとは見ていない。

4.3.6.　第６時の活動と分析

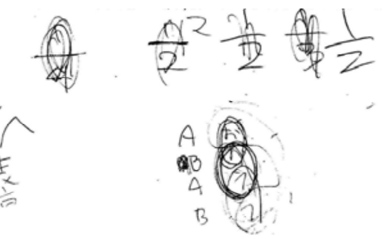

図 8. ２枚の硬貨の問題についての記述

16:13	01855	ＤＭ	(2 は) $\frac{1}{3}$ じゃねえん？ $\frac{1}{3}$ だよね？だってさ、これ(表・表)とこれ(表・裏、裏・表)とこれ(裏・裏)がパターン。これとこれだろ？１枚が表で１枚が裏だから、これとこれ(表・裏、裏・表)、これとこれは同じだろ？同じっつうか、何て言うんだ。
16:51	01860	ＤＭ	(ＨＳに) $\frac{1}{3}$ だよね？
17:01	01863	ＤＭ	$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$ か？ $\frac{1}{2}$ だな。
17:09	01864	ＤＭ	(2 の答えを $\frac{1}{2}$ に)変更。変更したから、変更。このパターン(1 枚が表で 1 枚が裏)が 2 つあるから。

２枚の硬貨を投げたときに１枚が表で１枚が裏になる確率を求める活動のときに、ＤＭの当初の答えは $\frac{1}{3}$ であった。すなわちＤＭは、当初、表・裏と裏・表を一通りと見る修正が必要な model-of を持っていた。

続いて、ＤＭは、「３通り中の１通り」を、「４通りのうちの２通り」という model-of に修正し、確率 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ を導いた(図８参照)。ここで、起こりうる場合の総数を４と見るのにＤＭが用いた手法は、素朴に Ａ の表、裏とＢの表､裏を組み合わせていくものである。図９の右下の記述を見るとＤＭの model-of は、４通りの中に２(通り)×２(通り)の乗法の関係をまだ持っていない。

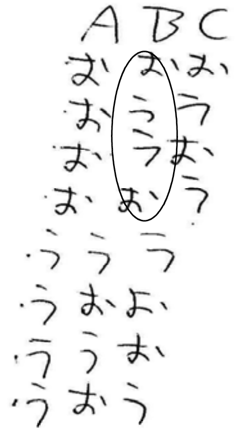

図 9. ３枚の硬貨の標本図(Ｂの丸印は筆者による)

３枚の硬貨の問題において、ＤＭが起こりうるすべての場合を素朴に描き出した model-of の標本図(鈴木， 1966)は、Ａ が表の場合が４通りで、Ａ が裏の場合が４通りである。Ｂ、Ｃの表、裏の出方は自分なりに整理しているが、Ｂの並びの一部が順序立っていない。しかし、この標本図は２(通り)×４(通り)の乗法の関係を持っている(図９参照)。

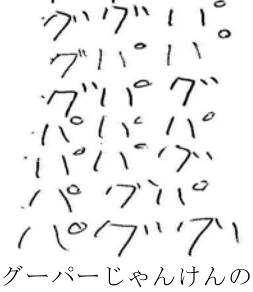

図 10. グーパーじゃんけんの標本図

また、第６時の最後の問題であるグーパーじゃんけんの model-of は、３枚の硬貨における２(通り)×４(通り)の model-of からさらに

発達した。ついに、ＤＭは、２（通り）×２（通り）×２（通り）の乗法の関係を意識し始めている（図 10 参照）。

4.3.7.　第７時の活動と分析

16:30	02192	ＤＭ	あー、書ききんないしー。

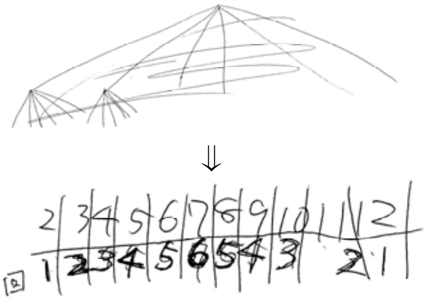

図 11. 樹形図から分布表への移行

２個のさいころを投げたときにもっとも出やすい目の和において、ＤＭは、当初、樹形図から解決しようとしたが、プリントに記入する余白が十分ではないことを理由に、確率分布表から答えを導いた（発話 02192; 図 11. 参照）。

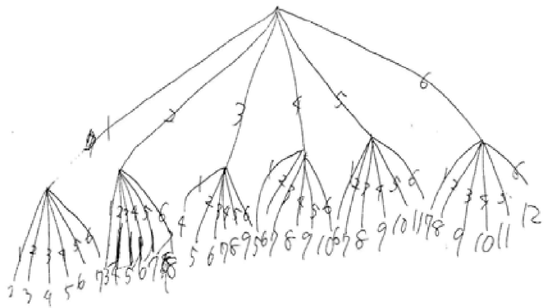

図 12. ２個のさいころにおける樹形図

また、隣りの席のＨＳが、６（通り）×６（通り）の樹形図を描いていたのを参考にして、ＤＭもまた、図 12 の樹形図を描いた。

20:32	02232	ＤＭ	一つのグループ、二つのグループ。（樹形図の１段目が赤を表しているか青を表しているかは）どっちでもいいじゃん、赤だって、青だって。同じは同じなんだから。同じ、同じ。

ところで、ＤＭは、２個のさいころの色を、赤、青に区別していない（発話 02232 参照）。ＤＭの情況への依存度は、低い。

47:53	02479	ＤＭ	さいころの気分。

最後に、２個のさいころを投げる活動では、実際の試行実験による相対度数と数学的確率に開きが見られたことの原因について、ＤＭは、発話 02479 のように述べている。ＤＭは、相対度数から数学的確率へと発展できるとは考えていない。

4.3.8.　第８時の活動と分析

図 13.　４本中１本あたりにおいて樹形図をもとにした確率

25:30	02693	T	いや、だって、じゃあもう一回聞くけれど、じゃあこれで先に引く人が当たる確率は？
25:33	02694	ＤＭ	$\frac{1}{4}$。
25:35	02695	T	$\frac{1}{4}$ だね。じゃあ、どれか一本なくなったとして、三本になったとする。じゃあ、これで当たる確率は？
25:43	02696	ＤＭ	$\frac{1}{3}$。

４本中１本が当たりのくじで、くじを先に引く a と後から引く b ではどちらが得であるかの問題に対して、ＤＭは早々に４（通り）×３（通り）の樹形図を描いた。しかし、後からくじを引く b が当たりを引く確率について、ＤＭは、$\frac{1}{3}$ と答えた（図 13 参照）。

b の当たりは、a がはずれるという条件の下に起こりうる。よって、ＤＭは、a がはずれを引いたという条件を当然のことと受け取り、a がはずれを引いた後の b の樹形図で考えている。ＤＭは、b が当たりを引くときの起こりうる場合の総数を９通りと見ている。

b の起こりうるすべての場合の数を捉えるＤＭの model-of は、12 ではなくて９であるので、修正が必要である。これは、すべての要素の起こる確率の和が１となる確率空間を形成していくことにおける問題点である。

５本中２本の当たりくじの問題では、ＤＭは、５×４の樹形図から、後からくじを引くｂの当たる確率 $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ を即座に求めた。

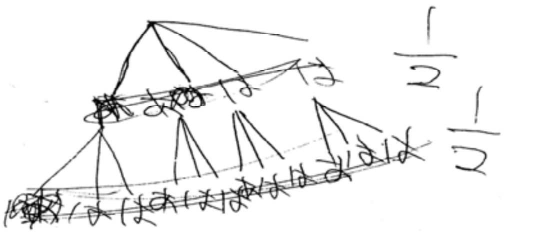

図 14. ４人中２人の委員における樹形図

40:40	02809	ＤＭ	(自分の表記の最初の 4 つは)当たりは２つ、はずれ２つ。
41:01	02812	ＤＭ	どれが、d だか分かんない？(d が含まれる確率は)$\frac{1}{2}$ で、$\frac{1}{2}$ でー。意味分かんねー。

第８時の最後は、a、ｂ、ｃ、ｄの４人の中から２人の委員を決めるときにｄが含まれる確率を求める問題である。ＤＭは、樹形図で考えようとしたり、当たり、はずれで考えようとしており、問題１、２の解決過程からの影響を強く受けていた(図 14 参照)。

ＤＭは、ここで、委員に選ばれることに当たり、委員に選ばれないことにはずれの情況を与えて、１番目にくじを引く人と、２番目にくじを引く人が当たりを引く(委員に選ばれる)確率がともに $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ で等しいことを捉えている。

4.3.9. 第９時の活動と分析

順列、組み合わせの活動である。

ＤＭは、非復元事象の起こりうる場合の総数の６通りを、素朴に標本図に描き出して解決した。しかし、そこに３(通り)×２(通り)×１(通り)の乗法の関係は見られない。

ＤＭは、続く復元事象の問題を、３(通り)×３(通り)×３(通り)の樹形図をもとにして、確率 $\frac{10}{27}$ を解いた。

26:19	03161	ＤＭ	(ＨＳに)赤,白ってきたら、あとは何がきてもオーケーだよ。

また、ある特定の事象を全体の事象から区別することの問題点である、赤と白と並ぶ場合の数を、樹形図から求めることに関して、ＨＳに発話 03161 のように説明している。

次は、女子３人 a、ｂ、ｃと男子ｄ、e から、混成のペアをつくる問題である。

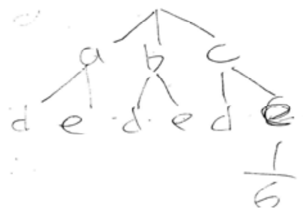

図 15. １ペアをつくることにおける樹形図

28:15	03184	ＤＭ	(2 ①の)問題の意味が分かんないからダメだ。
30:15	03202	ＤＭ	(2 ①は)1 ペアだけ？
30:54	03207	ＤＭ	(2 ①の樹形図を描き出す)a 、b 、c。
31:10	03211	ＤＭ	ワッハッハッハ。(樹形図を描くのは)簡単だ。

ＤＭは、1 ペアのみをつくる問題において、題意を捉えられずにいたが、その後は３×２の樹形図(図 15)を描き、確率 $\frac{1}{6}$ を求めた。

図 16. ２ペアをつくることにおける樹形図

31:37	03219	ＤＭ	(2 ②は①と)変わんなくねえ？ 2 ペアつくるとしたら、何通り？変わんないし。意味分かんねえ。

また、２ペアをつくる問題において、ＤＭは、男子が余らないということから、男子 d、e を起点とした樹形図(図 16)を描いた。この図をもとに、確率は $\frac{1}{6}$ であると考えた。

ＤＭは、１ペアをつくったあとに、もう１ペアをつくるという問題の情況が捉えられていない。ＤＭは、この２ペアをつくる問題において、解決を断念して、最終的には、板書の答え $\frac{1}{3}$ を転記した。

4.4. 単元全体の分析

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の図１をもとに、ＤＭの活動を分析する。記述するスペースを十分に確保するために、図１の矢印を

縦にしたが、他意はない。

4.4.1.　公平さについて

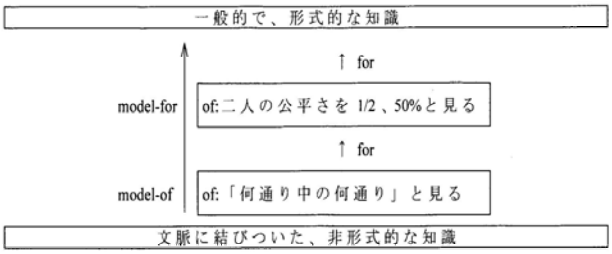

図 17. 公平さについての知識を形成していく過程

ＤＭは、当初から、公平さについて「何通り中の何通りずつ」が等しいという model-of を形成していた(図 17 参照)。他の子どもたちに見られたように、「何回中で何回ずつ起こったか」へと後戻りすることがなかった。

4.4.2.　事象の分類と数値化について

図 18 に、ＤＭの事象の分類と数値化における知識の形成過程を示す。

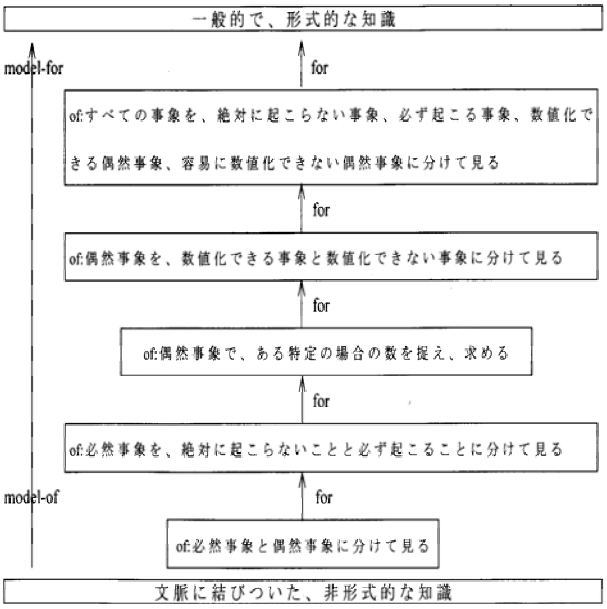

図 18.　事象の分類と数値化についての知識の形成過程

ＤＭは、最初に、偶然事象を、数値化できることと、できないことに分類することに消極的であった。しかし、ＤＭは、必然事象を絶対に起こらないことと、必ず起こることに区別して捉えることができた。

続いて、偶然事象の中でその物理的な対称性から数値化できるものがあることに気がついた後も、その事象を適切な数値で表すことができなかった。

4.4.3.　大数の法則について

ＤＭは、当初、試行回数の多少に関わらず相対度数と数学的確率は一致するという model-of を形成していた。次に、相対度数が数学的確率と一致するとは限らないことがわかると、ＤＭは、数学的確率ではなくて、相対度数を確率として捉えた。これは、ＤＭのみに見られた model-of である。

さらに、試行回数の多少により、相対度数の値に変化があることがわかっても、ＤＭは、試行回数の増加に伴い、相対度数は増加するという model-of を形成していた。

最終的に発話や記述を見ると、ＤＭは、試行回数の増加に伴い、相対度数が数学的確率に近づくという model-for を形成していない。

4.4.4.　同様に確からしい要素から成る確率空間の形成について

ＤＭの同様に確からしい要素から成る確率空間を形成していく過程を、図 19 に示す。

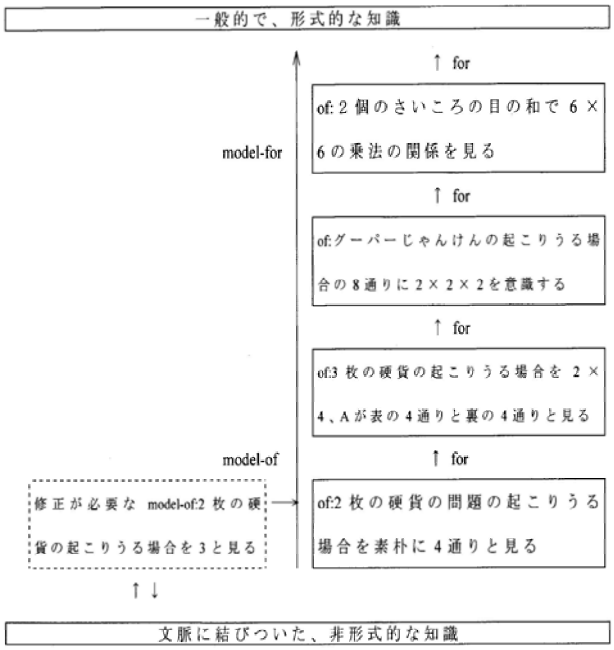

図 19.　同様に確からしい要素から成る確率空間の形成過程

ＤＭは、２枚の硬貨を投げる問題では、起こりやすさの比較から、起こりうる場合の総数を３通りと見る model-of を修正し、４通りと見る model-of を形成した。しかし、ＤＭは、４通りの中に２×２の乗法の関係を見いだせてはいなかった。

続いて、ＤＭは、３枚の硬貨の問題でも起こりうるすべての場合を８通りと見ることができたが、その描き出しの一部に乗法の関係を見いだしただけであった。さらに、グーパージャンケンの問題の描き出していく順番において、はじめてＤＭは、２×２×２の乗法の関係を意識し始めている。

５． 考察

公平さについて、ＤＭは、他の子どもたちの「何回中で何回起こったか」に比べると、やや進んだところの「何通り中の何通り」からモデルを発達させた。公平さについて、やや進んだ model-of の「何通り中の何通り」を数え上げる行為を足場にして、確率を数値に表すことへの移行がＤＭの活動に見られた。このことは「何通り中の何通り」を「何回中で何回起こったか」の model-of からの発達と見れば、Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の述べる一連の局所的な移行の過程に整合している。

また、子どもたちにとって、文脈に結びついた非形式的な知識から model-of を形成することは容易ではなかった。たとえば、２枚の硬貨を投げたときに１枚が表で、１枚が裏になる確率を求める活動のときに、ＤＭは、この問題の起こりうるすべての場合の数を３と見た。この model-of は、同様に確からしい要素から成る確率空間を形成していくことには発達しにくいので修正が必要である。修正が必要な model-of は、再びもとの文脈に戻り、model-of を形成することもあれば、直接的に model-of へと発達することもある。よって、修正が必要な model-of を加えて、Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の示す図１の図式を、さらに拡張する必要がある。

２個のさいころの問題では、ＤＭは、これまでの問題では見いだせなかった起こりうる場合の総数に６×６の乗法の関係を、見いだすことができた。さらに、ＤＭは、a、b、c、d ４人の中から２人の委員を選ぶときに d が含まれる確率を求めるときに、４本中２本が当たりのくじから当たりを引くことに、情況を読み替えることから答えを求めた。

ＤＭによる２個のさいころの問題における活動と、４人中２人の委員を決める問題における活動は、それ以前の複数の情況において形成された model-of が、一般化されて新たな情況で活用される model-for に発達していく様相を示すものである。このことは、Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の示す model-for への移行過程と一致する。

子どもたちによる確率の問題における解決の過程では、起こりうる場合の数を標本図に描き出すこともあれば、樹形図に表すことによってその場合の数に含まれている乗法的な関係に気がつくこともある。その中では、数学的に誤っている、修正が必要な model-of を形成することもある。しかし、model-of を修正することで、新たに問題の情況を捉えた model-of を形成し、モデルが発達していく様相が見られた。

知識の形成と表記はもちろん密接に関連しており、子どもたちは表出した model-of を内的に形成している。こどもたちの発話、表記は、子どもたちの心的形成物の一部である。これらを基にして、子どもの知識の形成を一連の過程として考察することができた。

本論文では、Gravemeijer（1997）の示す四つの水準ではなくて、図１に示した Van den Heuvel-Panhuizen（2003）による一連の局所的な移行として、こどもたちの知識の形成過程を捉えようと試みた。Van den Heuvel-Panhuizen（2003）による系列的に進んでいく過程の中で

も、モデルの自己発達（Gravemeijer, 1997）が見られた。

６． まとめ

今回は、現実的な場面から、試行回数の増加に伴い相対度数が数学的確率に近づいていくという知識を、ＤＭは形成することができなかった。ＤＭの事例は、大数の法則自体が、現実的な場面からの発展に位置せず、現実的な場面とは別の考えとして形成されていくこともあることを示唆している。

【引用・参考文献】

Freudenthal, H.（1971）. Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, *3*, 413-435.

Freudenthal, H.（1991）. *Revisting Mathematics Education: China Lecture*. Kluwer Academic Publishers.

藤田　宏ら.（2006）. 新編新しい数学２.（pp.152-168）. 東京書籍.

福森信夫.（1989）. 新旧学習指導要領の対比と考察：中学校数学科. 明治図書.

Gravemeijer,K.（1997）. Mediating between concrete and abstract. In T.Nunes & P.Bryant（eds.）, *Learning and Teaching Mathematics:An International Perspective*（pp. 315-345）. UK: Psychology press.

Gravemeijer, K. ,Cobb, P. ,Bowers, J. & Whitenack, J.（2000）. Symbolizing, modeling, and instructional design. In P.Cobb, E.Yackel, & K.McClain（eds.）, *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classroom*（pp.225-273）. Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

半田　進.（1997）. 中学校における確率指導についての一考察：大数の法則に対する生徒の意識を中心に. 日本数学教育学会誌, *79*（9）, 271-279.

林　昭.（1972）. 中学校における新しい確率・統計教材の開発. 日本数学教育学会論究, *23*, 1-23.

古藤　怜.（1972）. 確率の指導. 日本数学教育学会誌, *54*, 94-98.

三木俊幸.（2001）. 授業における数学的知識の発展的構成に関する研究：連立方程式の学習場面における新たなモデルの導入を通して. 上越数学教育研究, *16*, 103-114.

文部省.（1968a）. 小学校算数指導書. 大阪書籍.

文部省.（1968b）. 中学校新しい数学教育. 大阪書籍.

文部省.（1978a）. 小学校指導書算数編. 大阪書籍.

文部省.（1978b）. 中学校指導書数学編. 大日本図書.

文部省.（1999）. 中学校学習指導要領解説数学編. 大阪書籍.

西中　隆.（1967）. 小学校における確率の指導. 日本数学教育学会誌, *49*, 212-214.

Romberg, T. et al.（1996）. *Mathematics in Context: Take a chance.* Encyclopaedia Britanica Educational Corporation.

Steinbring, H.（1991）. The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 503-522.

鈴木喜久.（1966）. 中学校における確率. 日本数学教育学会誌, *48*, 202-206.

高橋裕樹.（2003）. 比の三用法を伴う小数の乗法及び除法における子どもの知識の構成過程について. 上越数学教育研究, *18*, 101-110.

手塚育男.（1980）. 確率指導の一考察：実験を主とした指導とその考察. 日本数学教育学会誌, *62*（7）, 185-189.

Treffers,A.（1991）. Didactical background of a mathematics program for primary education. In L.Streefland（ed.）, *Realistic mathematics education in Primary School*（pp. 21-56）. Uterecht:Freudenthal Institute/CD-B Press.

植芝　力.（1968）. 算数カリキュラムに確率を導入することについて. 日本数学教育学会誌, *50*（2）, 20-25.

Van den Heuvel-Panhuizen,M.（1996）. *Assessment and Realistic Mathematics Education*. Uterecht:Freudenthal Institute/CD-B Press.

Van den Heuvel-Panhuizen,M.（2003）. The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 9-35.

余伝　宏ら.（1983）. 中学校数学科における確率・統計教材の開発に関する一つの試み：つぼ実験による確率概念の形成について. 日本数学教育学会誌, *65*（9）, 218-226.